Modèles de processus ponctuels pour la libération des ascospores de *V. Inaequalis*

Katarzyna Adamczyk-Chauvat[1] Madalina Deaconu[2]
Paul Pierrat[1,2] Sylwester Masny[3]

[1] INRAE, MathNum, MaIAGE

[2]Inria, PASTA

[3] The National Institute of Horticultural Research, Poland

Contexte épidémiologique

La tavelure (*Venturia inaequalis*) : maladie fongique de pommiers


Fot. 1


Fot. 2

- différentes stratégies de lutte contre la tavelure
- rôle essentiel des méthodes chimiques

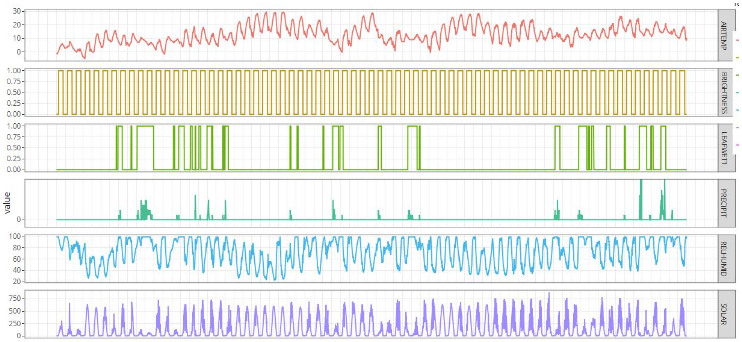
Objectif :

proposer un modèle pour prédire l'occurrence des spores du champignon $\rightsquigarrow$ réduction du nombre de traitements

Suivi des spores et données météorologiques

Monitoring de spores : piège Burkard en verger

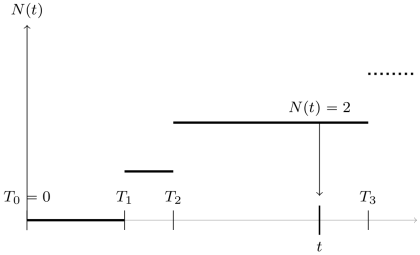
Données météo : mesures de la température, de l'humidité, du vent



Définition

Un processus ponctuel est une suite croissante de variables aléatoires non-négatives $\mathbf{T} = \{T_0 = 0, T_1, T_2, \dots\}$.

Processus de comptage associé à $\mathbf{T}$: $N(t) = \max\{k : T_k \leq t\}$



$T_1, T_2, T_3 \dots$: instants de libération des spores.

Caractérisation d'un processus ponctuel

Définition (Intensité conditionnelle)

$$\lambda^\star(t|\mathcal{H}_t) = \lim_{dt \to 0} \frac{\mathbb{E}(N(t+dt) - N(t)|\mathcal{H}_t)}{dt}$$

$$\lambda^\star(t|\mathcal{H}_t) \longleftrightarrow \text{loi de } \mathbf{T}$$

Caractérisation d'un processus ponctuel

Définition (Intensité conditionnelle)

$$\lambda^\star(t|\mathcal{H}_t) = \lim_{dt \to 0} \frac{\mathbb{E}(N(t+dt) - N(t)|\mathcal{H}_t)}{dt}$$

$$\lambda^\star(t|\mathcal{H}_t) \longleftrightarrow \text{loi de } \mathbf{T}$$

Modèles pour les occurrences des spores :

- processus de Poisson non-homogène :
  $\lambda^\star(t|\mathcal{H}_t) = \lambda_\theta(t)$
- processus de Hawkes :
  $\lambda^\star(t|\mathcal{H}_t) = \lambda_\theta(t, \{t_i : t_i < t\})$

Processus de Poisson non-homogène

$$\lambda_\theta(t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{K} \theta_i Z_i(t)\right)$$

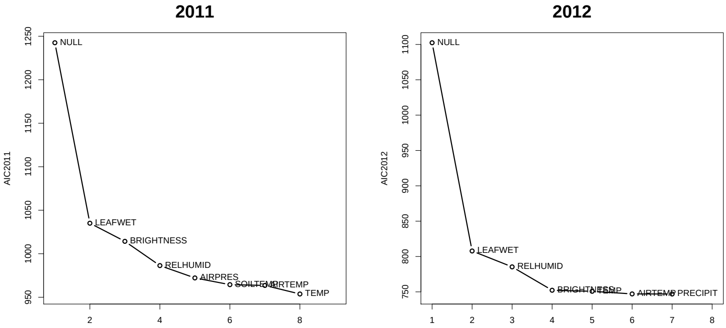
$Z_i(t)$: température houppier, température sol, température sous-sol, humidité relative, humidité foliaire, précipitations, luminosité, pression, ensoleillement, direction du vent, vitesse du vent

Sélection de variables basée sur LRT :

2011 : température houppier, température sol, température sous-sol, humidité relative, humidité foliaire, luminosité, pression

2012 : température houppier, température sol, humidité relative, humidité foliaire, luminosité, précipitations

Importance des variables météo

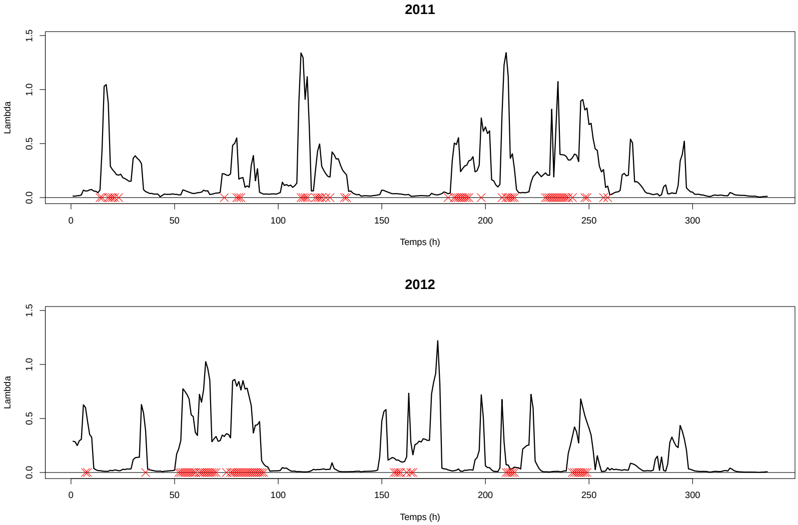


$$AIC = -2\log L(\hat{\theta}) + 2k$$

humidité foliaire, humidité de l'air, luminosité

Intensité $\lambda_{\hat{\theta}}(t)$

$t \in [0, 336)$ (deux premières semaines)

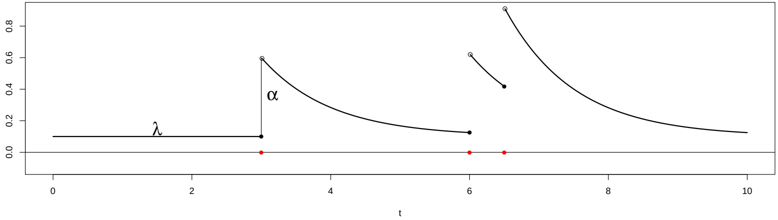


Processus de Hawkes

$$\lambda^\star(t|\mathcal{H}_t) = \lambda + \sum_{t_i<t} \mu(t - t_i)$$

$\lambda \in \mathbb{R}^+$: l'intensité de base, $\mu(.) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la fonction d'excitation, par exemple :

$$\mu(t) = \alpha \exp(-\beta t) \qquad 0 < \alpha < \beta$$



$\lambda = 0.1, \alpha = 0.5, \beta = 1$

Processus de Hawkes non-stationnaire

$$\lambda^\star(t|\mathcal{H}_t) = \exp\left(\theta^\intercal Z(t)\right) + \alpha \sum_{t_i<t} \exp\left(-\beta(t-t_i)\right)$$

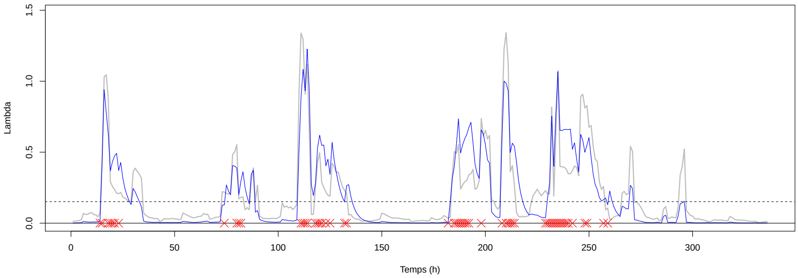
$Z_i(t)$	2011 $\hat{\theta}_{i,11}$	2012 $\hat{\theta}_{i,12}$
température houppier	-0.07	-1.18
température sol	0.04	1.18
température sous-sol	0.130	0.013
humidité relative	0.037	0.076
humidité foliaire	2.29	2.32
précipitations	0.15	1.00
luminosité	1.05	0.75
pression	-0.09	0.03

$\hat{\alpha}_{11}$: 0.20 $\hat{\alpha}_{12}$: 0.24

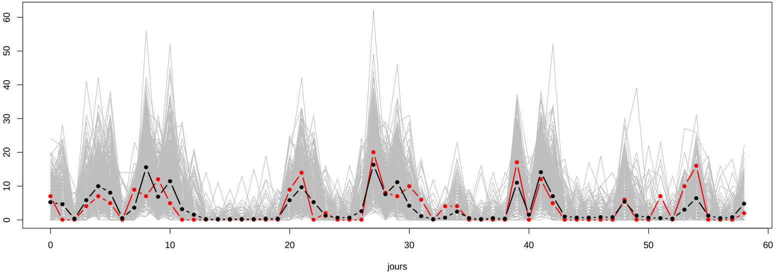
$\hat{\beta}_{11}$: 0.35 $\hat{\beta}_{12}$: 0.44

Comparaison des modèles

Modèle	AIC (2011)	AIC (2012)
Poisson homogène	1242	1102
Poisson non-homogène	953	747
Hawkes	829	664



Simulations versus observations



Nombre d'occurrences par jour

- observé
- médiane calculée sur 500 simulations de processus de Hawkes

Références I

[1] A.G. Hawkes (1971).
Point spectra of some mutually exciting point processes.
Journal of the Royal Statistical Society Series B, 33 :438–443.

[2] A.G. Hawkes, D. Oakes (1974).
A cluster process representation of a self-exciting process.
Journal of Applied Probability, 11 :493–503.

[3] Y. Ogata (1988).
Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes.
Journal of the American Statistical Association, 83 :9–27.

[4] Y. Ogata (1978).
The asymptotic behaviour of maximum likelihood estimators for stationary point processes.
Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 30 :243–261.

[5] P.J. Laub, T.Taimre, P.K. Pollett (2015).
Hawkes Processes.
arXiv :1507.02822 [math.PR].

[6] J.G. Rasmussen (2011).
Lecture Notes : Temporal Point Processes and the Conditional Intensity Function.
arXiv :1806.00221 [stat.ME].

[7] L.S. Rathbun, N. Cressie (1994).
Asymptotic properties of estimators for the parameters of spatial inhomogeneous Poisson point processes.
Advances in Applied Probability, 26 :122-154.

Références II

[8] T. Omi, Y. Hirata, K. Aihara (2017).
Hawkes process model with a time-dependent background rate and its application to high-frequency financial data.
arXiv :1702.04443 [q-fin.ST].

[9] Y.Ogata (1981).
On Lewis' simulation method for point processes.
IEEE Transactions on Information Theory, 27 :23–31.

[10] T. Ozaki (1979).
Maximum likelihood estimation of Hawkes' self-exciting point processes.
Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 31 :145–155.

[11] D.J. Daley, D. Vere-Jones (2003).
An introduction to the theory of point processes. Vol. I : Elementary theory and methods.

Springer, 2nd ed.